

Développement: Système  
de Lotka - Volterra

Pages 220  
(228)  
229  
267

Historique: Modèle proposé en 1925 indépendamment par Alfred Lotka et Vito Volterra, modélisent l'interaction entre une proie et son prédateur. Modèle actuellement utilisé pour la dynamique du lynx et du lièvre de neiges.

Théorème:

Soit  $x(t)$  le nombre de proies en fonction du temps et  $y(t)$  le nombre de prédateurs. Soit  $a > 0$  le coefficient de natalité / mortalité de proies, on considère  $x'(t) = a \cdot x(t)$ . Soit  $b > 0$  le coefficient représentant les proies chassées. On a alors  $x'(t) = ax - bxy$ .

De même, soit  $c > 0$  le coefficient d'"évolution" des prédateurs, tq  $y' = -cy$ .

Mais ces prédateurs se nourrissent de la proie, on ajoute ( $d > 0$ )  $d \cdot x \cdot y$  :

$$y' = -cy + d \cdot x \cdot y$$

Soit (E) le système de Cauchy (autonome)

$$(E): \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dx y \\ x(0) = x_0 > 0 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

Alors la solution maximale de (E) est globale et périodique.

De plus, nous pouvons prédire l'allure de la courbe  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

### Preuve :

$$\blacktriangleright (E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(x, y) \quad \text{où } F(x, y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}.$$

$F$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (car polynomiale en  $x$  et en  $y$ ) donc par le thm de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale sur un intervalle  $I = ]T^-; T^+[$  de  $\mathbb{R}$ . Nous allons mg  $I = \mathbb{R}$  grâce au théorème d'explosion en temps fini.

Montrons tout d'abord que  $x(t) > 0$  et  $y(t) > 0 \quad \forall t \in I$  (afin de pouvoir parler de  $\ln(x)$  et  $\ln(y)$  ensuite). Par l'absurde, soit  $t_0 \in I$  tq  $x(t_0) = 0$ . Alors pour  $\begin{cases} \tilde{x}(t) = 0 \\ \tilde{y}(t) = y(t_0) \cdot e^{-c \cdot (t-t_0)} \end{cases}$ , on a  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  solution de (E), et coïncide avec  $(x, y)$  en  $t_0$ . Par unicité de Cauchy-Lipschitz,  $x$  est identiquement nul, donc  $x_0 = 0$  : contradict°. Ainsi  $x > 0$ , et de la même manière  $y > 0$ .

Pour appliquer le théorème d'explosion en temps fini, nous introduisons une intégrale première du système. Soit

$$H(x, y) = dx + by - c \cdot \ln(x) - a \cdot \ln(y)$$

Montrons que la trajectoire d'une solution de (E) est incluse dans une ligne de niveau de  $H$ , nous tirerons alors des infos de notre solution grâce à des infos sur cette courbe.

$\frac{d}{dt} (H(x(t), y(t))) = 0$  donc  $H$  est constante sur la trajectoire

des solutions, i.e.  $H$  est une intégrale première de  $(E)$ .

On considère désormais  $f(x) = dx - c \cdot \ln(x)$  et  $g(x) = bx - a \cdot \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .  $f$  et  $g$  sont décroissantes puis croissantes, et admettent un minimum en  $m = f(\frac{c}{d})$  et en  $m' = g(\frac{a}{b})$ .

En remarquant que  $H(x, y) = f(x) + g(y)$ ,

on a pour toute solution maximale définie sur  $I$

l'existence de  $k \in \mathbb{R}$  tq  $\forall t \in I, f(x(t)) + g(y(t)) = k$ .

Particulièrement,  $f(x(t)) \leq k - m'$ . Or  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

donc  $\exists \alpha, \beta$  tq  $\alpha \leq x(t) \leq \beta \quad \forall t \in I$ . De même pour  $y$ .

Ainsi par le théorème d'explosion en temps fini, la solution est globale, i.e.  $I = \mathbb{R}$ .

► Nous nous intéressons désormais à l'allure de la trajectoire de la solution maximale (globale) de  $(E)$ . Les coordonnées de notre solution étant strictement positives, on se place dans  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ .

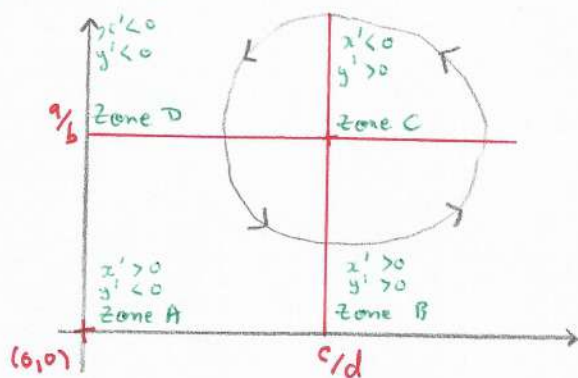
① On cherche tout d'abord les points d'équilibre du système, c'est à dire  $(\alpha, \beta)$  tq  $F(\alpha, \beta) = (0, 0)$

$$F(\alpha, \beta) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \alpha - b \cdot \alpha \cdot \beta = 0 & (1) \\ -c \cdot \beta + d \cdot \alpha \cdot \beta = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{ou} \\ \beta = a/b \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \text{ou} \\ \alpha = c/d \end{cases}$$



Ceci nous définit 4 droites partageant le dessin en 4 Zones.  
 On constate que les deux uniques points d'équilibre sont  $(0,0)$  et  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .



② Nous allons désormais représenter le comportement de  $x$  et de  $y$  en fonction de la zone.

Soit  $(x_0, y_0) \in \text{zone A}$ ,  $(x_0, y_0) \neq (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$  qui est trivial.

Supposons  $x_0 \neq \frac{c}{d}$  et  $y_0 \neq \frac{a}{b}$ . Par l'absurde, supposons que  $(x(t), y(t))$  reste dans la zone A  $\forall t$ . Dans la zone A,  $x$  est croissante et majorée (par  $\frac{c}{d}$ ) et  $y$  décroissante minorée (par 0).

Ainsi pour  $t \rightarrow +\infty$ ,  $(x(t), y(t))$  converge. Sa limite est nécessairement un point d'équilibre du système.  $x$  croissant et  $x_0 > 0$  donc

sa ne peut pas être  $(0,0)$ .  $y$  décroissante et  $y_0 < \frac{a}{b}$  donc

sa ne peut pas être le deuxième ! Ainsi la trajectoire finit par quitter la zone A, à partir d'un temps  $t_1$  vérifiant par

continuité  $x(t_1) = \frac{c}{d}$  et  $y(t_1) < \frac{a}{b}$ . On a alors  $y'(t_1) > 0$

et  $x'(t_1) > 0$ . Dans un voisinage à droite de  $t_1$ ,  $x' > 0$  et

(car  $x$  est  $C^1$ ) et on entre donc dans la zone B.

On démontre de la même façon que la trajectoire sort de la zone B vers la zone C, avec cependant la petite subtilité que  $x$  n'est plus majoré. Mais d'après ce qu'on a montré sur  $H$ ,  $x$  et  $y$  sont bornés, donc la trajectoire passe de B vers C. De même de C vers D, et de D vers A.

Ainsi la trajectoire tourne autour du point d'équilibre  $(c/d, a/b)$ .

③ Nous allons maintenant montrer que la trajectoire est périodique.

Nous allons nous intéresser à ce qu'il se passe sur la droite  $x = c/d$ . On remarque pour cela que  $y \mapsto H(c/d, y)$  est une fonction strictement croissante sur  $]a/b, +\infty[$ . Mais étant donné que notre trajectoire tourne, elle va intersecter une infinité de fois la demi-droite  $x = c/d, y > a/b$ . Or,  $H$  étant constante le long de la trajectoire, cette dernière ne peut revenir qu'au même point sur la demi-droite.

Soit alors  $t_1$  et  $t_2$  deux temps distincts pour lesquels la trajectoire passe par ce point. Soit  $T = t_2 - t_1$ . On vérifie que  $t \mapsto (x(t+T), y(t+T))$  est encore solution du système (car celui-ci est autonome) et coïncide avec  $(x, y)$  en  $t_1$ .

Par unicité de Cauchy-Lipschitz, on a  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$(x(t+T), y(t+T)) = (x(t), y(t))$ . La trajectoire est ainsi périodique,



et la trajectoire forme un cercle centré en  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

### Pour aller + loin:

• On peut calculer les valeurs moyennes de  $x$  et  $y$ :

Soit  $T$  la période de  $x$  et  $y$ .

$$\int_0^T \frac{x'}{x} dt = [\ln(x(t))]_0^T = 0 \quad \text{et en remplaçant } x' \text{ par } ax - bxy,$$

$$\text{on trouve alors } \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} \quad . \quad \text{De même, } \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d}.$$

On voit donc que  $x$  et  $y$  oscillent effectivement autour de  $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ .

• On peut modéliser l'affluence de la pêche: soit  $\varepsilon$  le taux de proie et de prédateur que l'homme pêche / chasse: cela revient à ajouter  $-\varepsilon x$  à la première équation et  $-\varepsilon y$  à la deuxième.

Les valeurs moyennes deviennent alors  $\frac{c+\varepsilon}{d}$  et  $\frac{a-\varepsilon}{b}$ . La pêche favorise donc les proies! Ceci a notamment été observé par Volterra: durant la 1<sup>ère</sup> guerre mondiale, il y eut moins de pêche mais une élévation du nombre de requins (chassant des sardines).